المحاضرة العاشرة

النهايات في تكامل ستيلتيس

مبرهنة 1: إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ وكانت الدالة $g(x)$ محدودة التغير على ذلك المجال: فإن هذا التكامل:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dg(x) \right| \le \max_{a\le x\le b} |f(x)| \, \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

محدود.

مبرهنة 2: إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$ والدالة $g(x)$ محدودة التغير على المجال $[a,b]$ فيكون:

$$\forall \varepsilon>0 : |S(f,g,T) - I| < \varepsilon \, \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

صحيحة.

مبرهنة: إذا كانت $(f_n(x))$ متتالية من الدوال الحقيقية المستمرة على المجال $[a,b]$ ومتقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ على المجال المغلق $[a,b]$، وكانت الدالة $g(x)$ محدودة التغير على المجال المغلق $[a,b]$ فإن:

$$\underset{n\to\infty}{\text{نها}} \int_a^b f_n(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

الإثبات: طالما أن المتتالية $f_n(x)$ متقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ على $[a,b]$ فإنه يوجد عدد طبيعي بحيث أنه:

$$\forall \varepsilon>0 \; ; \; \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \; ; \; \forall n > N_0 \Rightarrow$$
$$\max_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

وحسب المبرهنة 1 نجد: من أجل $n > N_0(\varepsilon)$

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dg(x) - \int_a^b f(x)\, dg(x) \right|$$

$$= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\, dg(x) \right| \le \max_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \varepsilon \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

وبحكم اختيارية العدد الحقيقي الموجب ε حيث يمكن أخذه صغيراً بقدر ما نريد نحصل على أن:

$$\underset{n\to\infty}{\text{نها}} \int_a^b f_n(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

مبرهنة: لتكن $(g_n(x))$ متتالية من الدوال محدودة التغير على المجال $[a,b]$
ومتقاربة من الدالة $g(x)$ على المجال المغلق $[a,b]$.
ولتكن العلاقة الآتية محققة: $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g_n) \le M \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$
$f(x)$ مستمرة على $[a,b]$ عندئذٍ يكون:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\, dg_n(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

أمثلة: لتكن $g_n(x)$ متتالية دوال معرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل
$g_n(x)=\frac{x^n}{n}$ ولنأخذ الدالة: $f(x)=\cos x$

الحل:
نلاحظ أن الدوال $g_n(x)=\frac{x^n}{n}$ ↗ متزايدة على $[0,1]$ وبالتالي محدودة التغير.

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(g_n(x)) = |g_n(1)-g_n(0)| = g_n(1)-g_n(0) = \frac{1}{n}-0 = \frac{1}{n}\le 1$$

من جهة ثانية نلاحظ أن الدالة $f(x)=\cos x$ مستمرة على R
ومنه مستمرة على $[0,1]$ فإن التكامل:

$\int_0^1 \cos x \, d\left(\frac{x^n}{n}\right)$ ⟶ موجود ومحدود

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cos x \, d\left(\frac{x^n}{n}\right) = \int \left(\frac{x^n}{n}\right)$$

متقاربة من الدالة الصفرية
$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}=0 \Rightarrow g(x)=0$
$\forall \varepsilon>0, \exists n_0=n_0(\varepsilon); \forall n>n_0$
$\Rightarrow \left|\frac{x^n}{n}-0\right| = \frac{|x|^n}{n} \le \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$
$\frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$
$n_0>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n_0}<\varepsilon$

وأيضاً المتتالية $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ متقاربة من الدالة الصفرية
$\frac{x^n}{n} \xrightarrow{u} 0$ على $[0,1]$
تتحقق شروط المبرهنة السابقة فيكون:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cos\, d\left(\frac{x^n}{n}\right) = 0 = \int_0^1 \cos x \, d(0)$$

تمرين:
* احسب التكامل الآتي:

$$\int_0^2 x^2 d\, g(x) \; ; \; g(x)=\begin{cases} -1 & ; 0\le x<\frac{1}{2} \\ 0 & ; \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2} \\ 2 & ; x=\frac{3}{2} \\ -2 & ; \frac{3}{2}<x\le 2 \end{cases}$$

محلول بالمحاضرة السابقة

نلاحظ أن الدالة : $f(x)=x^2$ دالة مستمرة على $[0,1]$ والدالة $g(x)$ تأخذ قيماً ثابتة في المجالات الجزئية :

$$[0,\tfrac{1}{2}[\quad , \quad [\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}[\quad ; \quad]\tfrac{3}{2},2]$$

$$a=0 ,\ b=2 \quad , \quad c_1=\tfrac{1}{2} \quad , \quad c_2=\tfrac{3}{2}$$

والدالة $g(x)$ محددة التغير على $[0,1]$ ، فالتكامل : $\int_0^2 x^2\, d\,g(x)$ موجود .

[illegible]

$$= f(0)[g(0+0)-g(0)] + f(\tfrac{1}{2})\,[g(\tfrac{1}{2}+0)+g(\tfrac{1}{2})] \cdot \text{- - - -} = -\frac{17}{4}$$

تمرين : احسب التكامل :

$$(S)\int_{-5}^{1} f(x)\,d\,g(x) \quad ; \quad (S)\int_{-5}^{1} g(x)\,d\,f(x)$$

$$f(x)=|x| \quad ; \quad g(x)=\begin{cases} x+2 & ; -5\le x<-1 \\ x^2 & ; -1<x<0 \\ 3 & ; x=0 \\ \ln(x+2) & ; 0<x<1 \\ 2 & ; x=1 \end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة : $f(x)=|x|$ مستمرة على المجال : $[-5,1]$ و الدالة $g(x)$ تملك مشتقاً محدود وقابل للمكاملة في $[-5,1]$.

$$g'(x)=\begin{cases} 1 & ; -5\le x\le -1 \\ 2x & ; -1<x<0 \\ \dfrac{1}{x+2} & ; 0<x<1 \end{cases}$$

$$(S)=\int_{-5}^{1} f(x)\,d\,g(x) = (R)\int_{-5}^{1} f(x)\cdot g'(x)\,dx + \cdots\cdots$$

من المعلوم أن :

$$|x|=\begin{cases} -x & ; x\le 0 \\ +x & ; x\ge 0 \end{cases}$$

$$(S)\int_{-5}^{1} f(x)\, dg(x) = (R)\int_{-5}^{-1} (-x)\cdot 1\cdot dx + (R)\int_{-1}^{0} (-x)(2x)\, dx$$

$$+ (R)\int_{0}^{1} x\cdot \frac{1}{x+2}\, dx + 5(-3+3) + (1)(1-1) + 0(\ln 2 - 0) + (1)(2-\ln 3)$$

$$= \frac{43}{3} - \ln 6$$

وباستخدام قانون الكاملة بالتجزئة

$$(S)\int_{-5}^{1} f(x)\, d g(x) + (S)\int_{-5}^{1} g(x)\, d f(x)$$

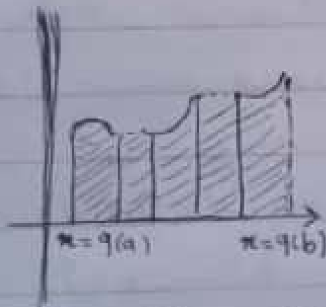
$$= [\, f(x)\cdot g(x)]_{-5}^{1} = 2 - 5(-3) = 2 + 15 = 17$$

$$(S)\int_{-5}^{1} g(x)\, d f(x) = 17 - \frac{43}{3} + \ln 6 = \frac{8}{3} + \ln 6$$

ملاحظة: المعنى الهندسي لتكامل ستيلتيس:

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وموجبة على $[a,b]$ ولتكن الدالة $g(x)$ دالة متزايدة تماماً على المجال $[a,b]$ «قد يوجد لها نقاط انقطاع»

ونفرض أن المعادلات الوسيطية: $x = g(t)$ $y = f(t)$ للمنحني (K).



* المجموعات الكلاسيكية (المقومة):

* $C[a,b]$: فضاء الدوال المستمرة على المجال المغلق $[a,b]$.

$B.V\,[a,b]$: فضاء الدوال محدودة التغير على المجال المغلق $[a,b]$.

مفهوم القياس:

يعد مفهوم القياس تعميم لمفهوم الطول في R ومفهوم المساحة في المستوي R_2، ومفهوم الحجم في الأبعاد R_3

ويستخدم مصطلح قياس مجموعة ليكون ذات معنى لأجل أي مجموعة جزئية من R مثلاً أو من أجل أي مجموعة جزئية من فضاء X.

كل $(X \neq \phi)$

تعريف: الجبر: لتكن X مجموعة ما غير خالية، ولتكن مجموعة كل أجزاء المجموعة X

$P(X)$ (أي أسرة كل المجموعات الجزئية من X).

يقال أن الصنف: $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ انه جبر على X إذا كان:

1- $\phi \in \mathcal{A}$ ، $X \in \mathcal{A}$

2- إذا كان: $A \in \mathcal{A}$ و $B \in \mathcal{A}$ فإن: $(A \cup B) \in \mathcal{A}$

3- إذا كان $A \in \mathcal{A}$ فإن $A^c \in \mathcal{A}$ $(A^c = X - A)$

ملاحظة:

من أجل أي عدد منتهٍ من المجموعات. $A_i \in \mathcal{A}$ ، $A_1, A_2, \dots, A_n$ فإن:

$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \in \mathcal{A}$

تعريف: الجبر التام: يقال أن الصنف: $S \subseteq P(X)$ انه جبر تام (سـ-جبر) على X إذا تحققت الشروط الآتية:

① - $X \in S$ ، $\phi \in S$

② - أيا كانت المتتالية (A_n) من S فإن: $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in S$

③ - إذا كانت: $A \in S$ ، فإن: $A^c \in S$ متممة.

مثال: $\mathcal{A}_1 = \{\phi\}$ ، $\mathcal{A}_2 = \{X, \phi\}$ ، $\mathcal{A}_3 = \{\phi, A, A^c, X\}$

$\mathcal{A}_4 = P(X)$

الحل: $\mathcal{A}_1$: ليس جبر، وهو ليس جبراً تاماً

$\mathcal{A}_2$: جبر

$\mathcal{A}_3$: جبر

$\mathcal{A}_4$: جبر، وهو جبر تام.

نتيجة 1: إذا كانت A, B من الجبر $\mathcal{A}$ (أو من الجبر التام S) فإن:

$A \cap B \in \mathcal{A}$ $(A \cap B \in S)$

$A - B \in \mathcal{A}$ (أي $A - B \in S$)

ملاحظة: كل جبر تام على X هو جبر على X، ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

الإثبات:

$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}\ (S)$

$A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}\ (S$